

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: توابع صعودی و نزولی

## توابع صعودی و نزولی :

تابع  $f(x)$  را در بازه  $(a, b)$  صعودی گویند هرگاه به ازای هر  $x$  که  $x_1, x_2 \in (a, b)$  :

$$\text{اگر } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

و نزولی گویند هرگاه:

$$\text{اگر } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

تابع  $f(x)$  را در بازه  $(a, b)$  صعودی اکید گویند هرگاه به ازای هر  $x$  که  $x_1, x_2 \in (a, b)$  :

$$\text{اگر } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

و نزولی اکید گویند هرگاه:

$$\text{اگر } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

**قضیه:** اگر تابع  $f$  در بازه  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در این بازه صعودی است هرگاه برای  $x \in (a, b)$  داشته باشیم:  $f'(x) \geq 0$  و نزولی

است هرگاه  $f'(x) \leq 0$ .

## عنوان کتاب: ریاضی عمومی

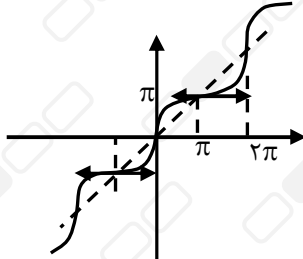
### فصل ۴: کاربردهای مشتق

#### موضوع: توابع صعودی و نزولی

**توجه:** اگر تابع در نقاط محدودی (نه در طول یک بازه) دارای مشتق برابر صفر باشد، بازهم می توان از قضیه فوق برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن

تابع استفاده کرد. مثلاً در تابع  $f(x) = x + \sin x$

$$f'(x) = 1 + \cos x$$



مشتق در نقاط محدودی برابر صفر است اما تابع صعودی (اکید) می باشد پس اگر  $f$  برابر صفر شد، باید بررسی کنیم که آیا تابع در یک بازه برابر عدد ثابت بوده است یا در یک نقطه محدود مشتق آن صفر شده است.

صعودی (اکید)



صعودی



$$x > x_1 \Rightarrow f(x) \geq f(x_1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0 = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0$$

## عنوان کتاب: ریاضی عمومی

### فصل ۴: کاربردهای مشتق

### موضوع: توابع صعودی و نزولی

**نکته:** اگر تابع در قسمتی از دامنه‌اش صعودی و در قسمت دیگرش نزولی باشد، آن را صعودی یا نزولی نمی‌گویند. (نه صعودی نه نزولی)  
اگر تابع در تمام دامنه‌اش مشتق‌پذیر نباشد (حتی اگر در بعضی از نقاط مشتق وجود نداشته باشد) نمی‌توان از تعیین علامت مشتق پی به صعودی یا نزولی بودن آن برد.

**نکته:** اگر توابع  $f$  و  $g$ ، هر دو صعودی یا هر دو نزولی باشند fog صعودی و اگر یکی از آنها صعودی و دیگری نزولی باشد fog نزولی است.

$$\text{صعودی } f \text{ و } g : x_2 > x_1 \Rightarrow \overbrace{g(x_2)}^{x_2} \leq \overbrace{g(x_1)}^{x_1} \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow f(g(x_2)) \leq f(g(x_1))$$

اگر  $f$  و  $g$  fog مشتق‌پذیر باشند:

$$(fog)' = g'f'(g(x))$$

(صعودی) مثبت  $\rightarrow$  منفی  $\times$  منفی : نزولی - نزولی

(صعودی) مثبت  $\rightarrow$  مثبت  $\times$  مثبت : صعودی - صعودی

(نزولی) منفی  $\rightarrow$  منفی  $\times$  مثبت : نزولی - صعودی

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی

## ۲- نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی (اکسترمم‌های نسبی) :

اگر تابع  $f$  در یک بازه در اطراف نقطه  $c$  تعریف شده باشد، آنگاه نقطه  $c$  را مینیمم نسبی تابع در این بازه گویند، هرگاه برای تمام  $x$ های این بازه  $f(x) \geq f(c)$  و ماکسیمم نسبی نامند هرگاه برای تمام  $x$ های این بازه  $f(c) \geq f(x)$ .  
دقت کنید که حتماً تابع باید در یک همسایگی نقطه  $c$  (یک بازه در اطراف  $c$  که  $c$  درون آن واقع شده است) تعریف شده باشد.

## تذکرات :

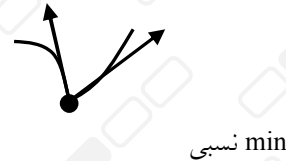
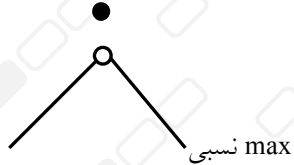
۱) اگر تابع  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  تعریف شده باشد چون تابع در نقاط  $a$  و  $b$  از یک طرف تعریف نشده است ، لذا در این نقاط نمی‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

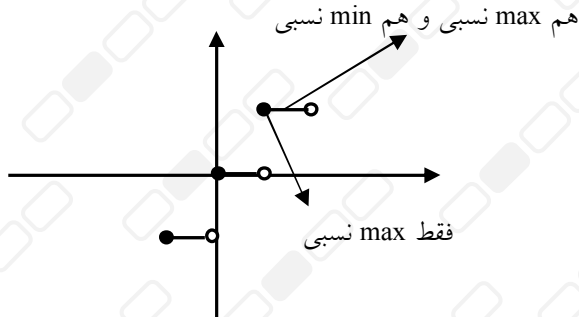
موضوع: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی

۲) لزومی ندارد تابع در نقاط اکسترمم نسبی پیوسته یا مشتق پذیر باشد.



مثلاً در تابع  $f(x) = k$  (تابع ثابت) هر نقطه اکسترمم نسبی است (هم ماکسیمم هم مینیمم)

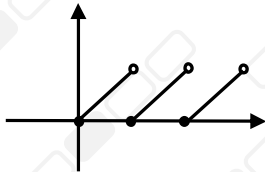
و برای تابع  $f(x) = [x]$  هر نقطه اکسترمم نسبی است. نقاط  $x \in \mathbb{Z}$  فقط ماکسیمم نسبی و نقاط  $x \notin \mathbb{Z}$  هم مینیمم و هم ماکسیمم نسبی است.



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی

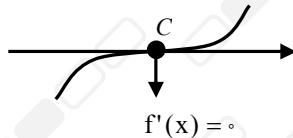


در تابع  $f(x) = x - [x]$  نقاط  $x \in \mathbb{Z}$  فقط مینیمم نسبی هستند.

نقاط  $x \notin \mathbb{Z}$  نه ماکسیمم و نه مینیمم نسبی است.

**قضیه:** اگر تابع  $f(x)$  در همسایگی نقطه  $c$  مشتق پذیر باشد (در همه نقاط) و در نقطه  $c$  اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه  $f'(c) = 0$ .

این شرط، شرط لازم وجود اکسترمم در نقطه  $c$  است ولی کافی نیست زیرا ممکن است  $f'(c) = 0$  باشد اما تابع در نقطه  $c$  اکسترمم نسبی نداشته باشد.



## عنوان کتاب: ریاضی عمومی

### فصل ۴: کاربردهای مشتق

#### موضوع: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی

شرط کافی برای آن که نقطه  $x = c$  نقطه اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر  $f$  باشد آن است که  $f'(c)$  در اطراف نقطه  $c$  تغییر علامت دهد.



لذا برای به دست آوردن اکسترمم نسبی در توابع مشتق‌پذیر کافی است ریشه‌های مشتق تابع را به دست آوریم. اگر تابع حول ریشه‌ی مشتق تغییر علامت داد نقطه، نقطه اکسترمم است. (به غیر از تابع ثابت که تمام نقاطش اکسترمم است و همواره هم  $f'(c) = 0$  است) لذا اگر ریشه‌ای از مرتبه فرد بود، نقطه به دست آمده اکسترمم نسبی تابع است و اگر ریشه به دست آمده از مرتبه زوج بود، نقطه اکسترمم نسبی نمی‌باشد.

مثلاً در توابعی به فرم  $f(x) = (x-a)^n g(x)$  با شرط  $g(a) \neq 0$ ، نقطه  $x = a$  طول نقطه اکسترمم نسبی تابع می‌باشد.

$$f'(x) = n(x-a)^{n-1}g(x) + (x-a)^n g'(x) = (x-a)^{n-1} (ng(x) + (x-a)g'(x))$$

لذا  $x = a$  ریشه مرتبه فرد مشتق است و  $f'$  در اطراف آن تغییر علامت می‌دهد.

در توابع مشتق ناپذیر باید تحقیق کنیم که آیا نقطه در تعریف اکسترمم صدق می‌کند یا نه؟ (مثلاً با رسم نمودار تابع)

قرارداد: هنگامی که گفته می‌شود نقطه اکسترمم منظور طول نقطه اکسترمم می‌باشد اما هنگامی که فقط اکسترمم خواسته می‌شود منظور  $y$  نقطه اکسترمم می‌باشد. در مثال‌های فوق با قرار دادن  $x$  به جای متغیر می‌توان اکسترمم نسبی را به دست آورد.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: پیدا کردن عرض نقاط اکسترم...

## پیدا کردن عرض نقاط اکسترم نسبتی تابع بدون یافتن طول آنها :

در توابعی که خط مماس بر تابع در نقطه اکسترم موازی محور  $x$  هاست می توان عرض نقطه اکسترم نسبتی را به صورت مستقیم به دست آورد.

برای این منظور خط  $y = k$  را با تابع قطع می دهیم و شرط ریشه مضاعف داشتن آن را تحقیق می کنیم (البته در اینجا لازم است تحقیق شود که تابع در  $y$  به دست آمده اکسترم نسبتی دارد یا نه)

نکته: در توابعی به فرم  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$  در صورتی که تابع دارای یک ماکسیمم و یک مینیمم باشد، داریم:

$$y_{\max} \times y_{\min} = \frac{\Delta \text{ صورت}}{\Delta \text{ مخرج}} = \frac{b^2 - 4ac}{b'^2 - 4a'c'}$$

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: خاصیت‌های مهم توابع کسری

## ۴- خاصیت‌های مهم توابع کسری :

در توابع کسری در صورت مشتق‌پذیر بودن صورت و مخرج کسر اگر تابع دارای نقطه اکسترمم نسبی باشد، مختصات این نقطه در هویپیتال تابع نیز صدق می‌کند.

$$y_0 = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, y'_0 = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

اگر  $\left. \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right|$  اکسترمم نسبی تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  باشد، داریم:

اثبات :

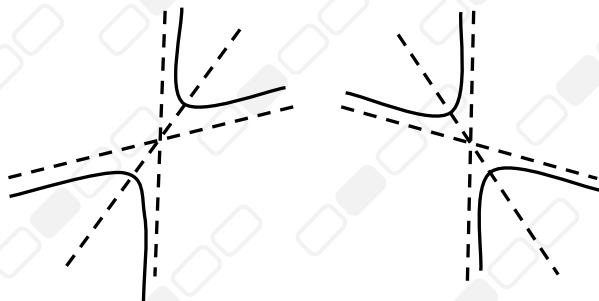
$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} \Big|_{x_0} = 0 \longrightarrow f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = 0$$

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: خاصیت‌های مهم توابع کسری

**نکته:** در توابعی به فرم  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}$  در صورتی که تابع اکسترمم داشته باشد، هوییتال تابع خط واصل بین نقاط اکسترمم تابع می‌باشد. زیرا هوییتال تابع  $y_H = \frac{2ax + b}{b'}$  یک خط است و چون می‌دانیم نقاط اکسترمم در هوییتال تابع صدق می‌کند (چون تابع کسری است) لذا همین خط (هوییتال تابع) خط واصل بین نقاط اکسترمم می‌باشد ضمن آن که از مرکز تقارن تابع نیز می‌گذرد. در صورت وجود اکسترمم به یکی از این دو حالت است:



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: ماکسیمم و مینیمم مطلق

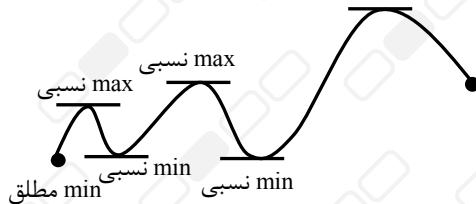
## ماکسیمم و مینیمم مطلق :

نقطه  $x_0 \in I$  را نقطه‌ی ماکسیمم مطلق تابع  $f$  در بازه  $I$  نامند هرگاه برای تمام  $x \in I$   $f(x_0) \geq f(x)$  و نقطه  $x_0$  را مینیمم مطلق گویند هرگاه برای تمام  $x \in I$   $f(x) \geq f(x_0)$ .

## نکات :

- در تعریف اکسترم‌های مطلق، بازه  $I$  می‌تواند یک بازه بسته باشد لذا ابتدا و انتهای بازه نیز می‌تواند اکسترم مطلق باشند.
- تعداد اکسترم‌های نسبی محدودیتی ندارد اما اکسترم مطلق در صورت وجود یکتاست (عرض اکسترم‌های مطلق منحصر به فرد است).

max مطلق و نسبی



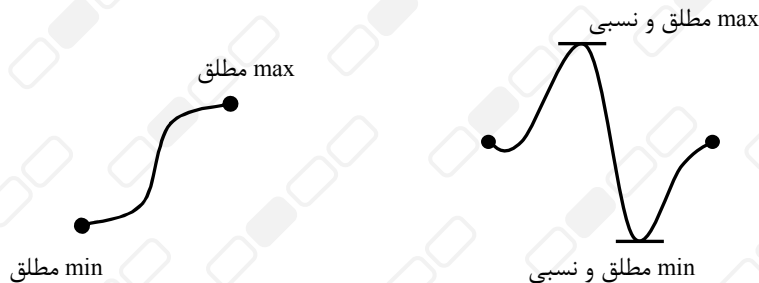
عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: ماکسیمم و مینیمم مطلق

(۳) نقطه اکسترمم مطلق در صورتی که ابتدا یا انتهای بازه نباشد، اکسترمم نسبی نیز خواهد بود.

(۴) اگر تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد، در این صورت  $f$  در این بازه حتماً دارای یک ماکسیمم مطلق و یک مینیمم مطلق خواهد بود، اما ممکن است اکسترمم نسبی نداشته باشد.



(۵) برای بدست آوردن اکسترمم‌های مطلق تابع ابتدا اکسترمم‌های نسبی را پیدا می‌کنیم و سپس مقادیر اکسترمم‌های نسبی  $(y_{ext})$  را با (ابتدای بازه)  $f$  و (انتهای بازه)  $f$  مقایسه می‌کنیم. بیشترین مقدار، ماکسیمم و کمترین مقدار، مینیمم مطلق خواهد بود.

(۶) در توابع اکیداً یکنوا  $max$  و  $min$  مطلق در ابتدا و انتهای بازه به دست می‌آید.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: قضایای ماکسیمم و مینیمم مطلق

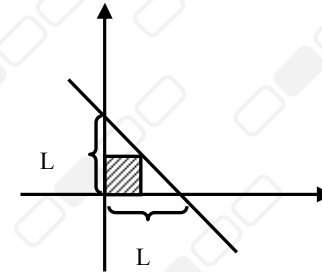
## قضایای ماکسیمم و مینیمم مطلق :

(۱) وقتی جمع دو متغیر (مثبت) مقدار ثابتی است، حاصل ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که با هم برابر باشند.

$$\text{ثابت } x + y = L$$

$$f(x) = xy = x(L - x) = Lx - x^2$$

$$f'(x) = L - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2} = y \Rightarrow \text{Max } f = \frac{L^2}{4}$$



$$\text{در حالت کلی : } ax + by = L$$

$$f = xy \rightarrow \text{Max } f : ax = by = \frac{L}{2} \Rightarrow \text{Max } f = \frac{L^2}{4ab}$$

تذکر : در صورتی که تساوی  $ax = by = \frac{L}{2}$  مقدور نباشد،  $ax - by$  را مینیمم می کنیم.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: قضایای ماکسیمم و مینیمم مطلق

(۲) اگر حاصلضرب دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، آنگاه  $x + y$  وقتی مینیمم است که  $x = y = \sqrt{L}$

(۳) هرگاه مجموع دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد  $a^n b^m$  ( $n, m \in \mathbb{Q}$ ) وقتی ماکسیمم است که:  $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$

$$a + b = L$$

$$f = a^n (L - a)^m \rightarrow f' = na^{n-1}(L - a)^m - a^n m(L - a)^{m-1} = 0$$

$$\Rightarrow (L - a)^{m-1} a^{n-1} (n(L - a) - ma) = 0 \xrightarrow{a, b \neq 0} nL - na - ma = 0 \rightarrow a = \frac{nL}{n+m} \rightarrow \frac{a}{n} = \frac{L}{n+m}$$

$$b = L - \frac{nL}{n+m} = \frac{mL}{n+m} \rightarrow \frac{b}{m} = \frac{L}{n+m} \Rightarrow \frac{a}{n} = \frac{b}{m}$$

(۴) اگر  $a$  و  $b$  دو متغیر مثبت باشند و  $a^n b^m$  مقدار ثابتی باشد، آنگاه مینیمم  $a + b$  هنگامی است که  $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: نقطه بحرانی

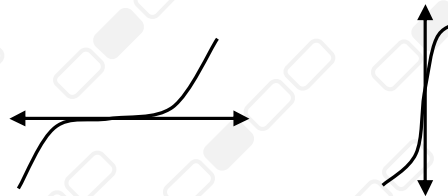
## نقطه بحرانی :

نقطه  $x \in D_f$  را بحرانی نامند هرگاه یا در آن نقطه  $f'(x)$  وجود نداشته باشد (مانند نقاط ناپیوستگی - به جز ابتدا و انتهای بازه - ، زاویه‌دار، بازگشت، عطف قائم) و یا  $f'(x) = 0$  باشد.

## تذکرات :

(۱) هر نقطه اکسترمم نسبی حتماً نقطه‌ای بحرانی نیز هست اما هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

بحرانی هست ولی اکسترمم نیست.



(۲) نقاط اکسترمم مطلق نیز حتماً بحرانی هستند مگر آن که ابتدا و انتهای بازه قرار گرفته باشند، در واقع برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق یک تابع باید نقاط بحرانی آن را به دست آورده و عرض نقاط بحرانی را با هم و با عرض ابتدا و انتهای بازه مقایسه کنیم.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: مشتق مراتب بالاتر

## مشتق مراتب بالاتر :

دیدیم اگر تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  مشتق پذیر باشد  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  می باشد و در صورتی که تابع در بازه  $I$  مشتق پذیر باشد، تابع مشتق آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اگر تابع  $f'$  در بازه  $I$  مشتق پذیر باشد، مشتق آن را با  $f''(x)$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$f''(x) = \frac{df'}{dx} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: مشتق مراتب بالاتر

مشتق  $n$ ام برخی توابع مهم :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c \rightarrow f^{(n)}(x) = an! \rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$f(x) = \sin(ax + b) \Rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \cos(ax + b) \Rightarrow y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{k}{(ax + b)} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(k)n!(-1)^n a^n}{(ax + b)^{n+1}}$$

$$\frac{k}{x} \rightarrow \frac{-k}{x^2} \rightarrow \frac{2k}{x^3} \rightarrow \frac{-6k}{x^4} \rightarrow \frac{24k}{x^5}$$

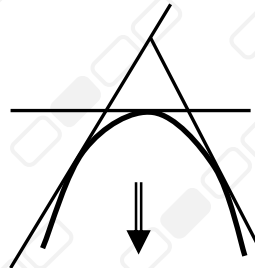
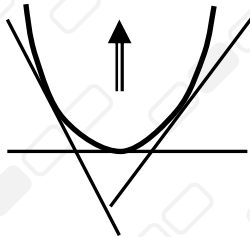
عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: جهت تقعر تابع

### جهت تقعر تابع :

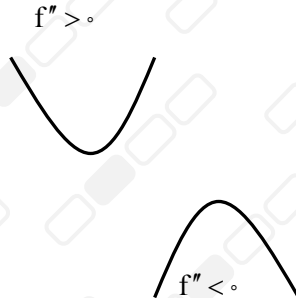
اگر تابع  $f$  روی بازه  $I$  همواره اکیداً صعودی باشد جهت تقعر تابع روی بازه  $I$  رو به بالاست یا تقعر تابع مثبت است و اگر  $f'$  اکیداً نزولی باشد جهت تقعر تابع رو به پایین است یا تقعر تابع منفی است. می توان نشان داد تقعر تابع در یک بازه مثبت است هرگاه خطوط مماس بر تابع همواره زیر تابع قرار داشته باشند و منفی است هرگاه کلیه خطوط مماس بر تابع بالای تابع قرار داشته باشند.



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: جهت تقعر تابع



اگر تابع  $f$  روی بازه  $I$  مشتق پذیر باشد، مشتق آن را با  $f''$  یا  $f^{(2)}$  نشان می دهند.

قضیه: اگر تابع  $f$  روی بازه  $I$  مشتق پذیر باشد آنگاه:

الف) اگر  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow$  جهت تقعر منحنی رو به بالاست.

ب) اگر  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$  جهت تقعر منحنی رو به پایین است.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: نقطه‌ی عطف

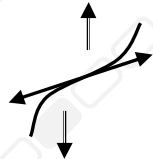
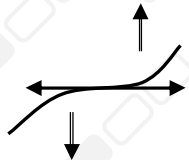
## نقطه‌ی عطف :

نقطه  $c$  را نقطه عطف تابع نامند هرگاه:

$$c \in D_f \quad (۱)$$

(۲) جهت تقعر تابع در اطراف  $c$  تغییر کند.

(۳) تابع در این نقطه مماس واحد (متحصر به فرد) داشته باشد.



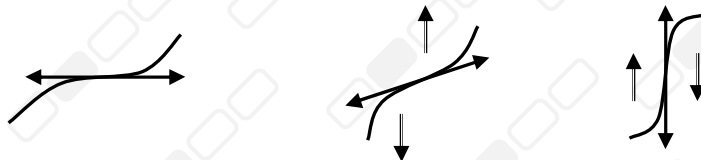
عطف نیست

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

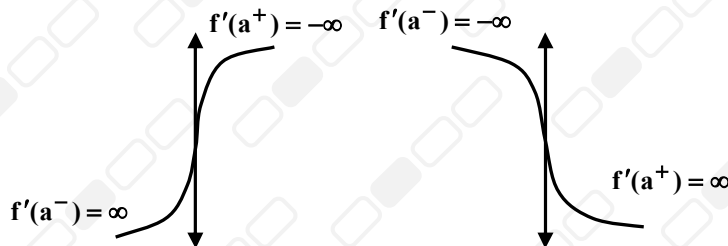
فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: نقطه‌ی عطف

تذکر: اگر خط مماس بر تابع در نقطه عطف موازی محور  $x$  باشد اصطلاحاً عطف را، عطف افقی و اگر موازی محور  $y$  باشد، آن را عطف قائم و در غیر این صورت آن را عطف مایل می‌نامند.



در اطراف نقطه عطف قائم علامت مشتق تغییر می‌کند.



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: نقطه‌ی عطف

برای یافتن نقاط عطف کافی است نقاط بحرانی  $f'$  را به دست آوریم و سپس در این نقاط تغییر جهت تقعر و وجود مماس واحد را بررسی کنیم (برای عطف‌های غیرقائم - چون در عطف قائم نقطه‌ی عطف نقطه‌ی بحرانی  $f'$  محسوب نمی‌شود).

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\} \quad x=0 \text{ نقطه بحرانی } f' \text{ محسوب نمی‌شود}$$

اگر  $f''$  در نقطه‌ای صفر شود و تابع مماس واحد داشته باشد اما جهت تقعر در اطراف این نقطه تغییر نکند، این نقطه را اصطلاحاً نقطه «مِپلا» می‌نامند. (مانند  $y = x^4$ )

نکات :

(۱) ریشه‌های مرتبه فرد  $f''=0$  طول نقطه عطف و ریشه‌های مرتبه زوج آن طول نقطه مِپلا می‌باشد.

(۲) ریشه‌های مرتبه زوج معادله  $f'=0$  طول نقاط عطف افقی تابع می‌باشد.

(۳) شرط  $f''(x)=0$  برای نقطه عطف بودن  $x_0$  نه لازم است و نه کافی.

ممکن است  $f''(x)=0$  اما جهت تقعر تغییر نکند  $\leftarrow$  کافی نیست.

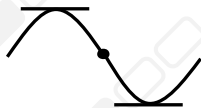
ممکن است  $f''(x) \neq 0$  اما نقطه، نقطه‌ی عطف باشد (مانند عطف قائم)  $\leftarrow$  لازم نیست.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: نقطه‌ی عطف

۴) اگر تابع در فاصله  $[a, b]$  پیوسته باشد و  $f'(a) = f'(b) = 0$  و تابع در این فاصله مشتق دوم داشته باشد نقطه‌ای مانند  $c$  وجود دارد به طوری که  $f''(c) = 0$ . (یعنی تابع دو بار مشتق‌پذیر بین هر دو اکسترمم نسبی حتماً یک نقطه عطف خواهد داشت).



بیشتر بدانید: در این نکته کافی است شیب در نقاط  $a$  و  $b$  برابر باشد.

نکته: تابع  $f$  را دو بار مشتق‌پذیر می‌نامیم هرگاه  $f'$  و  $f''$  موجود باشند.

۵) اصطلاحاً می‌گویند خط مماس بر منحنی در نقطه عطف از منحنی عبور می‌کند زیرا قسمتی از منحنی بالای خط و قسمتی از منحنی پایین خط مماس می‌باشد.



۶) در توابعی به فرم  $f(x) = g(x) \cdot (x - x_0)^{n+1}$  به شرط آن که  $n \in \mathbb{N}$  و  $g(x_0) \neq 0$  نقطه  $x = x_0$ ، طول نقطه عطف تابع می‌باشد.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

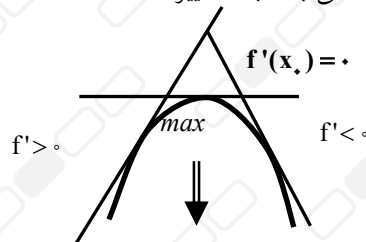
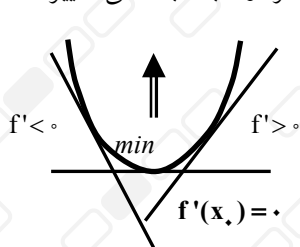
موضوع: آزمون‌های مشتق

## ۱۰- آزمون‌های مشتق (روش تشخیص ماکسیمم از مینیمم توابع) :

اگر تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = x_0$  مشتق‌پذیر باشد و در این نقطه  $f'(x_0) = 0$  شود، آنگاه از روش‌های زیر برای تشخیص ماکسیمم یا مینیمم بودن تابع استفاده می‌کنیم.

### آزمون مشتق اول :

اگر در اطراف  $x = x_0$  و از سمت چپ به راست علامت  $f'$  از منفی به مثبت تغییر کند، نقطه، نقطه مینیمم و اگر از مثبت به منفی تغییر کند، نقطه، نقطه ماکسیمم می‌باشد.



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: آزمون‌های مشتق

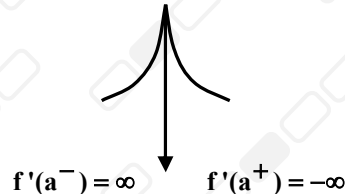
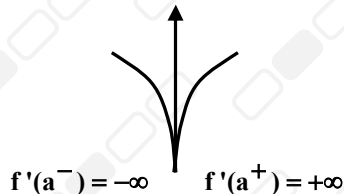
## تذکرات :

(۱) اگر علامت  $f'$  در اطراف  $x_0$  تغییر نکند، تابع  $f$  در نقطه‌ی  $x = x_0$  اکسترمم ندارد.

(۲) در حالتی که تابع در نقطه  $x_0$  پیوسته نباشد، آزمون بی‌نتیجه است.

(۳) اگر تابع در نقطه  $x_0$  مشتق‌پذیر نباشد، در دو حالت این آزمون بامعنی است:

(الف) در نقاط بازگشت همواره تابع اکسترمم دارد و مشتق نیز تغییر علامت می‌دهد (از  $\infty$  به  $-\infty$  یا بالعکس)



(ب) در نقاط زاویه‌دار اگر تابع اکسترمم داشته باشد، مشتق تغییر علامت می‌دهد.

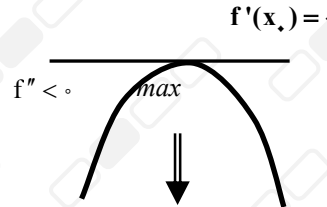
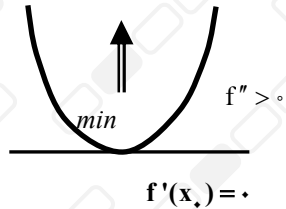
عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: آزمون‌های مشتق

### آزمون مشتق دوم :

اگر تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = x_0$  پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و  $f'(x_0) = 0$  و مشتق دوم تابع نیز در  $x = x_0$  موجود باشد، آنگاه اگر  $f''(x_0) > 0$  باشد،  $x_0$  نقطه مینیمم و اگر  $f''(x_0) < 0$  باشد،  $x_0$  نقطه ماکسیمم تابع می‌باشد.



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

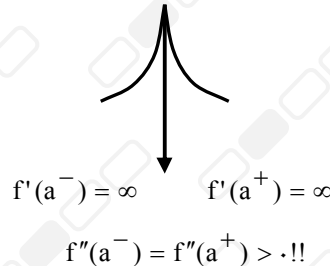
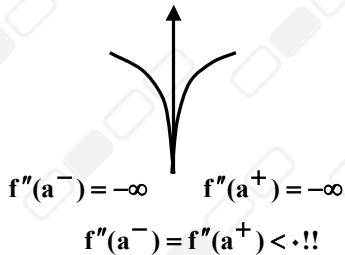
موضوع: آزمون‌های مشتق

## تذکرات :

(۱) در حالت  $f''(x_0) = 0$  این آزمون بی نتیجه است (مانند  $y = x^4$  که نقطهٔ میلا دارد نه نقطهٔ عطف)

(۲) در این حالت نیز اگر  $f$  پیوسته نباشد، آزمون بی نتیجه است.

(۳) در نقاط مشتق ناپذیر استفاده از این آزمون بی نتیجه است. یعنی ممکن است علامت مشتق دوم مثبت باشد اما نقطه ماکزیمم باشد (مانند نقطهٔ بازگشت). در نقاطی مانند نقطهٔ زاویه دار استفاده از این آزمون بی نتیجه است.



Min است با وجود آنکه  $f''$  تغییر علامت داده است.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: آزمون‌های مشتق

### آزمون مقایسه :

برای تشخیص ماکسیمم یا مینیمم بودن یک نقطه در هر تابعی (چه مشتق‌پذیر چه مشتق‌ناپذیر) می‌توان  $f(a)$  را با  $f(a + \varepsilon)$  و  $f(a - \varepsilon)$  مقایسه کرد. این آزمون بیشتر در توابع ناپیوسته (مانند براکت) و یا در نقاط مشتق‌ناپذیری که در مورد اکسترمم بودن آن شک داریم (مانند نقطه زاویه‌دار) به کار می‌رود.

توجه: گاهی اوقات در تست‌ها برای تشخیص نقطه عطف قائم از بازگشت و مقایسه‌های از این قبیل می‌توانیم به جای پیدا کردن مشتق دوم از آزمون مقایسه استفاده کنیم.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار تابع درجه‌ی ۲

$$y = ax^2 + bx + c$$

رسم نمودار تابع درجه‌ی ۲ :

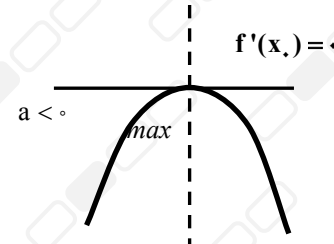
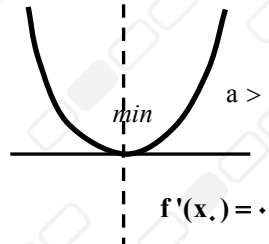
(۱) همواره پیوسته است.

(۲) از حل معادله  $y' = 0$  ، محور تقارن و نقطه اکسترمم به ترتیب زیر حاصل می‌شود:

$$y' = 2ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

محور تقارن:

$$S \quad \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

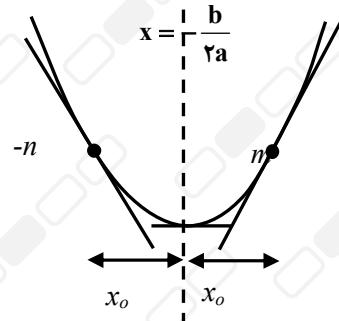


عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار تابع درجهی ۲

۳) شیب نقاط قرینه نسبت به محور تقارن قرینه‌ی هم است و عرضشان یکسان است.



$$y' = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + x, \rightarrow y' = 2ax.$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - x, \rightarrow y' = -2ax.$$

در حالت کلی توابعی که محور تقارنی به موازات محور  $y$ ها دارند مانند توابع زوج شیب منحنی در نقاط قرینه نسبت به محور تقارن، قرینه هم است.

۴) در توابع درجه ۲، دو ریشه نسبت به محور تقارن، قرینه‌اند.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار تابع درجه‌ی ۳

۱۲- رسم نمودار تابع درجه ۳ :  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(۱) نقطه عطف منحنی  $x = \frac{-b}{3a}$  می‌باشد.

(۲) با توجه به آن که  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$  یکی از حالات زیر در مورد منحنی ممکن است:

الف)  $\Delta f' > 0$



ب)  $\Delta f' = 0$



ج)  $\Delta f' < 0$



$a > 0$

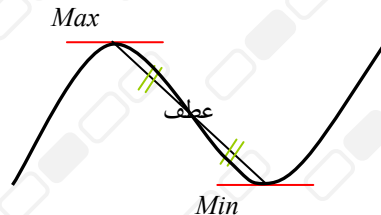
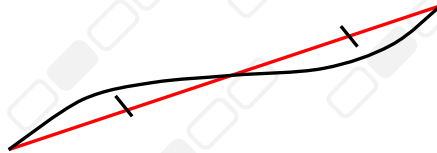
$a < 0$

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار تابع درجه‌ی ۳

۳) نقطه عطف مرکز تقارن منحنی است لذا هر خطی که از نقطه عطف می‌گذرد توسط تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود:



نتیجه: نقطه عطف وسط دو اکسترمم تابع است

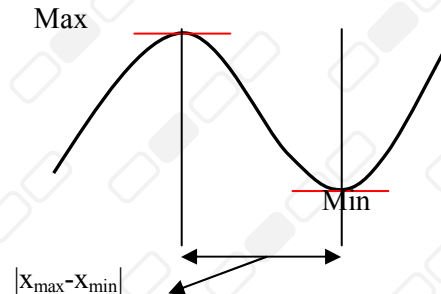
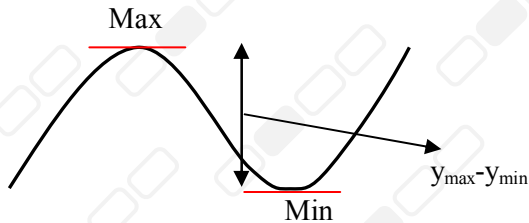
$$\begin{array}{l} \text{عطف } x = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \\ \text{عطف } y = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \end{array}$$

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار تابع درجه‌ی ۳

۴) اگر تابع دارای دو اکسترمم باشد، دو خط به موازات محور  $x$  می‌توان بر آن مماس کرد و دو خط به موازات محور  $y$  می‌توان بر آن عمود کرد که فاصله آنها عبارت است از:



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار تابع هموگرافیک

## ۱۳- رسم نمودار تابع هموگرافیک

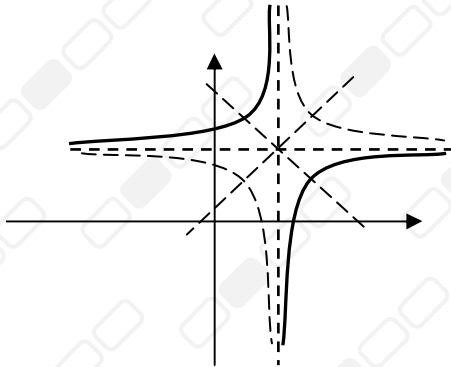
حالات خاص:

الف) اگر  $c = 0$  باشد، نمودار یک خط راست است  $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$

ب) اگر  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ، تابع یک تابع ثابت به موازات محور  $x$  ها است.

در واقع صورت ضربی از مخرج است  $x \neq -\frac{d}{c}$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad c \neq 0, x \neq -\frac{d}{c}$$



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

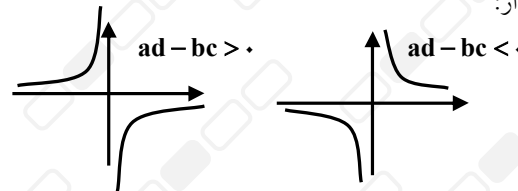
موضوع: رسم نمودار تابع هموگرافیک

نکات :

(۱) مرکز تقارن تابع محل تلاقی مجانب‌های آن است.

(۲) معادلات محورهای تقارن تابع عبارتست از:

(۳)



(۴) اگر محورهای مختصات را به مرکز تقارن انتقال دهیم، معادله جدید تابع عبارتست از:

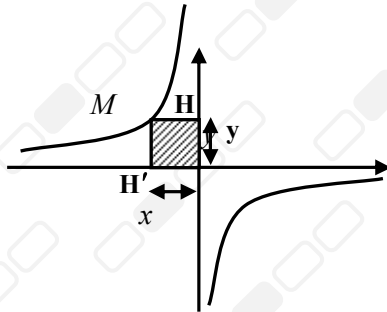
$$Y = \frac{bc - ad}{c^2} X$$

$$y - \frac{a}{c} = \pm \left( x + \frac{d}{c} \right) \sqrt{\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}}$$

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار تابع هموگرافیک



۵) حاصلضرب فواصل هر نقطه روی تابع هموگرافیک از مجانب‌ها برابر است با :

$$|MH \times MH'| = \left| \frac{bc - ad}{c^2} \right|$$

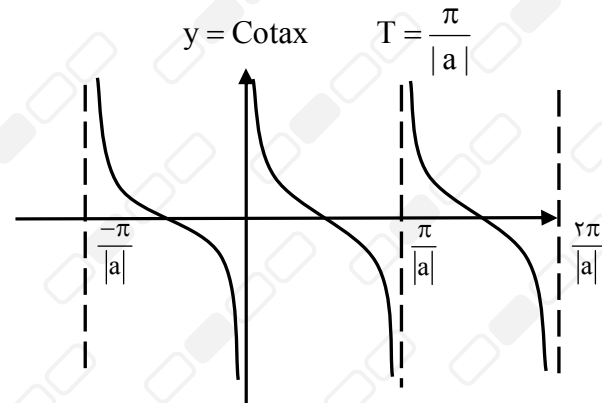
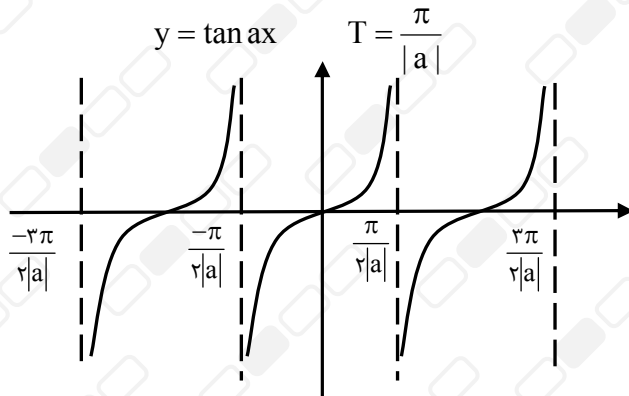
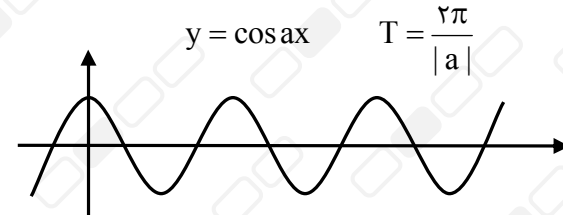
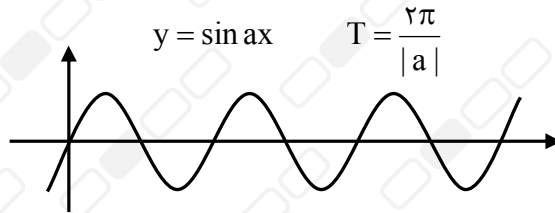
۶) تابع هموگرافیک روی هر شاخه‌اش اکیداً یکنواست اما روی دامنه‌اش غیریکنوا می‌باشد .

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار توابع مثلثاتی

(رسم نمودار توابع مثلثاتی :



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم توابع کسری

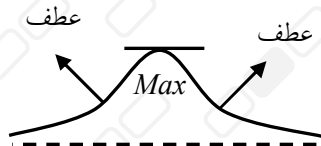
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

توابع به فرم

(۱) مشتق این تابع به صورت:

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

(۲) اگر  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$  و مخرج تابع ریشه نداشته باشد. نمودار آن به یکی از دو حالت زیر است:

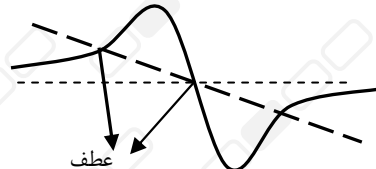
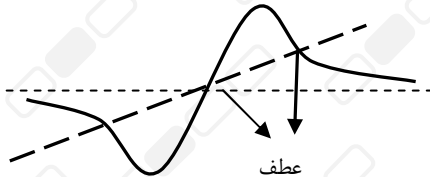


عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم توابع کسری

(۳) اگر  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$  باشد نمودار تابع به یکی از شکل‌های زیر است: (مخرج ریشه نداشته باشد).



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

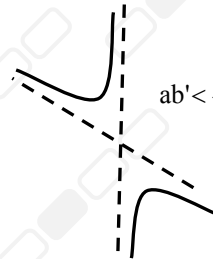
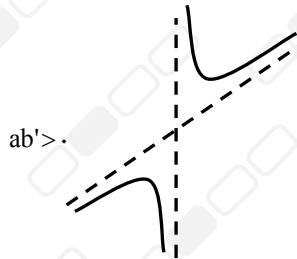
فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم توابع کسری

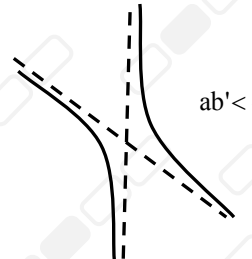
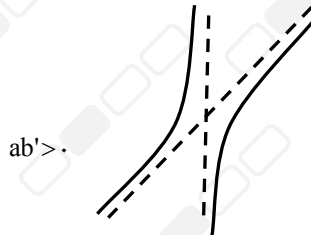
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'} \quad b' \neq 0$$

رسم نمودار توابع به فرم

نمودار تابع فوق یک هذلولی مایل است که به یکی از دو صورت زیر است:  
الف) مشتق دو ریشه دارد



ب) مشتق ریشه ندارد



مشتق این فرم دقیقاً همان مشتق فرم قبل است.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم توابع کسری

## نکات :

- (۱) محل تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن و نیمساز مجانب‌ها محور تقارن می‌باشد.
- (۲) هوییتال تابع از مرکز تقارن می‌گذرد و اگر تابع دارای اکسترمم باشد، هوییتال از اکسترمم نیز عبور می‌کند.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: رسم نمودار در حالت کلی

## رسم نمودار در حالت کلی :

با اطلاعاتی که از جدول تغییرات مشتق اول و دوم تابع به دست می‌آوریم می‌توانیم نمودار تابع را در حالت کلی رسم نماییم. اما توجه به اطلاعات زیر در اغلب تست‌ها باعث انتخاب گزینه درست می‌گردد.

- (۱) دامنه تابع
- (۲) ریشه‌های تابع
- (۳) زوج یا فرد بودن تابع
- (۴) دوره تناوب تابع در صورت متناوب بودن
- (۵) بازه‌های صعودی و نزولی
- (۶) اکسترم‌های تابع در صورت وجود
- (۷) جهت تقعر و نقاط عطف در صورت وجود
- (۸) مجانب‌ها
- (۹) نقاط مشتق‌ناپذیری مانند: بازگشت و زاویه‌دار

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: ارتباط بین نمودارهای  $f'$  ,  $f$

### ۱۸- ارتباط بین نمودارهای $f'$ , $f$ :

در صورتی که  $f'$  در نقاط مورد بحث وجود داشته باشد داریم:

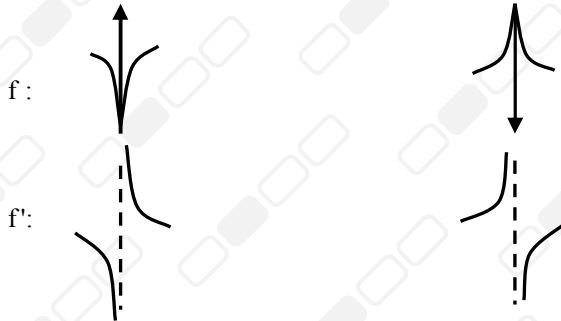
- (۱) اکسترم‌های  $f$  ریشه‌های  $f'$  می‌باشد .
- (۲) نقاط عطف  $f$  ، اکسترم‌های  $f'$  می‌باشد، (به جز عطف قائم) اگر عطف  $f$  افقی باشد،  $f'$  اکسترمی روی محور  $x$  ها دارد .
- (۳) در جاهایی که  $f$  رو به بالاست،  $f'$  صعودی و در جاهایی که  $f$  رو به پایین است،  $f'$  نزولی است.
- (۴) در بازه‌هایی که  $f$  صعودی است،  $f'$  بالای محور  $x$  و در بازه‌هایی که  $f$  نزولی است،  $f'$  پایین محور  $x$  است.
- (۵) نقاط زاویه‌دار  $f$  ، نقاط ناپیوستگی  $f'$  می‌باشد.

عنوان کتاب: ریاضی عمومی

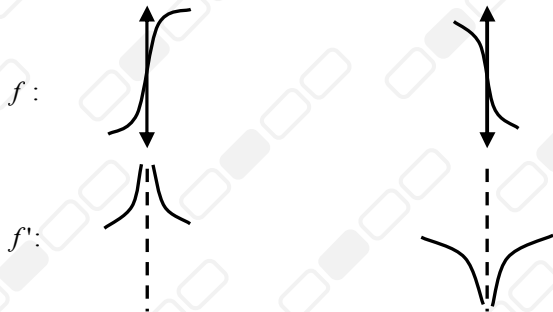
فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: ارتباط بین نمودارهای  $f'$  ,  $f$

۶) نقاط بازگشت  $f$  مجانب قائم  $f'$  با انفصال ساده می باشد.



۷) نقاط عطف قائم  $f$  ، مجانب قائم  $f'$  با انفصال مضاعف می باشد.



عنوان کتاب: ریاضی عمومی

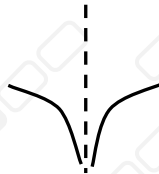
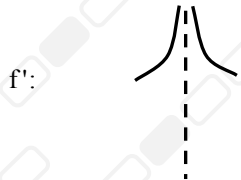
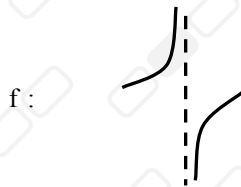
فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: ارتباط بین نمودارهای  $f'$  ,  $f$

۸) اگر خط  $y = k$  مجانب افقی تابع  $f$  باشد،  $y = 0$  مجانب افقی  $f'$  است.

۹) اگر خط  $y = ax + b$  مجانب مایل  $f$  باشد،  $y = a$  مجانب افقی  $f'$  خواهد بود.

۱۰) اگر خط  $x = a$  مجانب قائم  $f$  با انفصال ساده باشد،  $x = a$  مجانب قائم  $f'$  با انفصال مضاعف است.

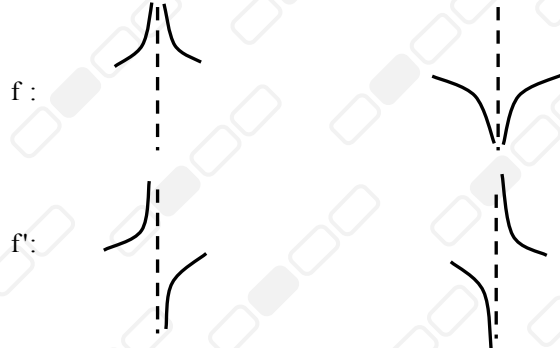


عنوان کتاب: ریاضی عمومی

فصل ۴: کاربردهای مشتق

موضوع: ارتباط بین نمودارهای  $f'$  ,  $f$

و اگر خط  $x = a$  مجانب قائم  $f$  با انفصال مضاعف باشد،  $x = a$  مجانب قائم  $f'$  با انفصال ساده خواهد بود.



(۱۱) اگر خط  $x = a$  بر تابع  $f$  مماس باشد یا نیم مماس باشد حتماً  $f'$  در این نقطه مجانب قائم خواهد داشت مانند نقاط توقف، بازگشت و عطف قائم.

